Игорь Бурдонов

21 апреля 2019

Законы исключённого третьего и противоречия

Прежде всего, должен сказать, что я математик, а не логик. Поэтому и рассуждать дальше буду, в основном, как математик.

Не будет большим преувеличением сказать, что в XX в. во время кризиса оснований математики, спровоцированного парадоксами наивной теории множеств, под знаком закона исключённого третьего проходило генеральное сражение, а не какие-то арьергардные бои. Говоря словами самого этого закона, вопрос стоял так: закон исключённого третьего либо верен, либо не верен, а третьего не дано. На языке алгебры логики этот вопрос оказывается двумя утверждениями: $A \vee \neg A = 1$ и $A \& \neg A = 0$, где A закон исключенного третьего как высказывание, «1» означает «истина», а «0» означает «ложь». Первое утверждение – это как раз и есть закон исключённого третьего, если A понимать как произвольное высказывание. Второе утверждение – это закон противоречия. Иными словами, сам вопрос о верности или не верности закона исключённого третьего ставился в рамках той логики, которая предполагает верность как закона исключенного третьего, так и закона противоречия. И в этом заключён некоторый парадокс, разрешением которого становится, по сути, снятие самого вопроса.

Можно сказать, что такое снятие вопроса стало в математике стандартным приёмом: когда оказывается, что нельзя ни доказать, ни опровергнуть утверждение A, строятся две разные математические теории. В одной верно A, в другой верно $\neg A$. Например, это произошло с пятым постулатом Евклида: через точку вне прямой можно провести не более одной прямой, не пересекающейся с данной и лежащей в той же плоскости. Когда не удалось его ни доказать, ни опровергнуть, появилась геометрия Лобачевского, в которой через точку вне прямой можно провести бесконечно много прямых, не пересекающихся с данной и лежащих в той же плоскости. Чуть позже появилась и геометрия Римана, в которой таких прямых нет вообще, но она существеннее отличается от евклидовой геометрии, не только пятым постулатом. Тем не менее, если от этого отвлечься, можно сказать, что «других» теорий может быть несколько, в зависимости от того, в каком смысле $\neg A$. Но этот вопрос о природе отрицания уводит нас сильно в сторону, поэтому больше я об этом говорить не буду.

Почему такое возможно в математике, а, скажем, в физике – нет? Потому что математика не отвечает на вопрос, как устроен мир. Она говорит: если пятый постулат Евклида верен, то мир устроен так, а если не верен, то вот так. Вопрос «а как на самом деле?» в математике не имеет смысла. Математика конвенциональна.

Что-то похожее произошло и с законом исключённого третьего. Вообще-то к нему критически относились ещё в древности, в том числе и сам Аристотель указывал на границы его применимости. Тут нужно уточнить, что есть две формы этого закона: слабая и сильная, сформулированные ещё Аристотелем. Слабая форма (оригинальная формулировка Аристотеля): «Оба утверждения A и не-A не могут быть одновременно ложны». Сильная (у Аристотеля в «Метафизике» как способ рассуждения): «Одно из утверждений A или не-A должно быть истинным. Запись $A \vee \neg A = 1$ относится как раз к сильной форме.

Как пишет Н.Н. Непейвода [Непейвода 2019], «сильный закон исключенного третьего математически означает полноту используемой теории, что практически недостижимо». Видимо, имеется в виду первая теорема Гёделя о неполноте арифметики и, следовательно, любой теории, включающей арифметику. И далее: «интуиционизм в математике начинался с утверждения о недостоверности сильного закона исключенного третьего, но он опровергает его достаточно тонко, сохраняя слабый закон исключенного третьего и придавая ему точную математическую формулировку: $\neg\neg(A \vee \neg A)$, не вводя дополнительных логических значений». Это значит, что интуиционистская логика не является трехзначной логикой (как показал В.И. Гливенко).

Тем не менее, трёхзначные логики тоже появились. Например, логика Клини вводит третье значение «неопределённость» или «неизвестно». Если A неопределённо, то $\neg A$ тоже неопределённо, и потому их дизъюнкция неопределённа, т.е не истинна (закон исключённого третьего не выполняется), также их конъюнкция неопределённа, т.е. не ложна (закон противоречия не выполняется).

В общем, в математике образовалось много разных логик. И математика (хотя не обязательно математики) со свойственным ей безразличием к ответу на вопрос «а как на самом деле?» изучает эти логики как формальные системы, даже не пытаясь одну предпочесть другой. Вот Кузнецов [Кузнецов 2007] пишет: «Анализ оснований математики убедительно показывает также, что источник математических парадоксов заключается не в правилах логики, определяющих вывод, а только в правилах определения понятий. С этой точки зрения, универсальный метод устранения парадоксов должен состоять не в ограничении признанных правил классической логики, а в уточнении критериев допустимых объектов».

На мой взгляд, именно этим и занимались аксиоматические теории множеств, ограничивая допустимые множества так, что самые чудовищные множества исчезали вместе с порождаемыми ими парадоксами. Например, такое чудовище как «множество всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента», приводящее к парадоксу Рассела-Цермело, который является формализованным парафразом логического «парадокса лжеца», известного ещё древним грекам.

В общем, я согласен с тем, что выражение «*А* должно быть либо *Б*, либо не-*Б*» – это атрибутивный вариант закона исключенного третьего (в его сильной форме), а выражение «*А* не может одновременно быть и *Б* и не-*Б*» – это атрибутивный вариант закона противоречия. И мне тоже показалось странным употребление слов «должно быть» в первой формулировке вместо слова «есть». Это можно было бы понимать не только в деонтическом смысле, но и в духе интуиционизма или конструктивизма: должен быть предоставлен алгоритм, показывающий, что *А* есть *Б*, или алгоритм, показывающий, что *А* есть не-*Б* (можно и оба алгоритма). Но я не думаю, что автор имел в виду это. Кстати, и вторая формулировка была бы яснее, если бы имела немного другой вид: «Не верно, что одновременно *А* есть *Б* и *А* есть не-*Б*”. Это чтобы не возникало соблазна понимать слова «не может» как утверждение о том, что не существуют двух алгоритмов, один из которых показывает, что *А* есть *Б*, а другой – что *А* есть не-*Б*.

То, что «закон в его второй/ “отрицательной” формулировке “был прекрасно известен в арабской философии начиная с калама и, насколько нам известно, тщательно соблюдался”, в то же время встречаются случаи, когда “нарушается именно его `императивная` формулировка”», тоже не удивительно. Математика пока не склонна делать какие-либо послабления закона противоречия; логику Клини никто не предлагает положить в основание математики, она вовсе не для этого. И гегелевская диалектическая логика остаётся предметом философии, но не математики. А вот закон исключённого третьего, действительно, ставит острые вопросы внутри самой математики, одним из ответов на которые является отказ от этого закона в его сильной формулировке. Лично мне, правда, больше нравятся другие ответы, ведущие не в «тьму» интуиционизма, а на «ясные поляны» аксиоматических теорий множеств.

Непейвода 2019 – Н. Н. Непейвода. А. А. Ивин. — Закон исключённого третьего. / Гуманитарная энциклопедия: Концепты [Электронный ресурс] // Центр гуманитарных технологий, 2002–2019 (последняя редакция: 30.03.2019).
https://gtmarket.ru/concepts/6974

Кузнецов 2007 – Словарь философских терминов. Научная редакция профессора В.Г. Кузнецова. М., ИНФРА-М, 2007, с. 217-218.
http://ponjatija.ru/node/221